Die Antwort auf diese Frage ist bejahend. Zum Beweis werden zwei Hilfssätze benötigt.

Hilfssatz 1: Gibt Dim $\mathfrak{R}$ die Dimensionszahl eines Teilraumes $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{V}_n$ an, so gilt [16]

$$\operatorname{Dim}\mathfrak{R}+\operatorname{Dim}\mathfrak{S}(\mathfrak{R})=n\,. \qquad (\mathrm{A.}\ 13)$$

Dieser Hilfssatz ist für die üblichen Vektorräume (d. h. solche über Körpern der Charakteristik null) geläufig; sein Beweis überträgt sich unverändert auf den vorliegenden Vektorraum.

Hilfssatz 2: Ist $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots \boldsymbol{b}_n$ eine beliebige Menge von n linear unabhängigen Vektoren (d. h. eine Basis von $\mathfrak{V}_n$), so schreibt sich die allgemeinste lineare Abbildung, die Gln. (A. 10) und (A. 11) erfüllt, in der Form

$$\boldsymbol{a}'=\sum_{p,q=1}^{n}\beta_{pq}\,\boldsymbol{b}_p\,(\boldsymbol{b}_q\cdot\boldsymbol{a}) \qquad (\mathrm{A.}\ 14)$$

mit

$$\beta_{pq}=\beta_{qp}\,,\quad \beta_{pp}=0\,; \qquad (\mathrm{A.}\ 15)$$

Gl. (A. 9) wird hier nicht gefordert. Beim Beweis dieses Hilfssatzes verwendet man wesentlich den Spezialfall von Hilfssatz 1, daß jeder auf allen Vektoren senkrechte Vektor der Nullvektor ist.

Aus Hilfssatz 1 schließen wir nun zunächst

$$\mathfrak{S}[\mathfrak{S}(\mathfrak{R})]=\mathfrak{R}\,, \qquad (\mathrm{A.}\ 16)$$

d. h. der auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ senkrechte Teilraum ist mit $\mathfrak{R}$ identisch. Beweis: Einerseits enthält $\mathfrak{S}[\mathfrak{S}(\mathfrak{R})]$ sicher den Teilraum $\mathfrak{R}$; andererseits ist die Dimension beider Teilräume nach Hilfssatz 1 gleich. Nunmehr ist nur noch zu zeigen, daß alle symmetrischen Matrizen mit verschwindender Hauptdiagonale, die jeden auf $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ senkrechten (also in $\mathfrak{R}$ liegenden) Vektor annihilieren, in der KLEIN-Gruppe enthalten sind. Hierzu wählt man die Basis $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ in Hilfssatz 2 so, daß die ersten, etwa s, Vektoren den Teilraum $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ aufspannen und daß die übrigen Vektoren diese Basis zu einer von $\mathfrak{V}_n$ ergänzen. Damit jeder auf den ersten s Basisvektoren senkrechte Vektor annihiliert wird, dürfen nur diese ersten s Vektoren in Gl. (A. 15) wirklich vorkommen. Ein solcher Ausdruck läßt sich aber sofort als Summe von KLEIN-Transformationen der in Gl. (A. 12) gegebenen Form auffassen.

Man findet mit den bereitgestellten mathematischen Hilfsmitteln übrigens sofort die Ordnung der KLEIN-Gruppe, d. h. die Anzahl verschiedener zulässiger Festlegungen der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern: mit $\operatorname{Dim}\mathfrak{S}(\mathfrak{R})=s$ ist diese Anzahl gegeben durch $2^{s(s-1)/2}$. Denn die KLEIN-Gruppe ist isomorph zur additiven Gruppe der s-reihigen symmetrischen Matrizen mit verschwindender Hauptdiagonale über dem Primkörper der Charakteristik 2; jedem Element der KLEIN-Gruppe ist nach Gl. (A. 14) eine s-reihige Matrix zugeordnet, deren Elemente β_{pq} Gl. (A. 15) gehorchen und außerhalb der Hauptdiagonale nur die beiden Werte 0 und e annehmen können.

Zusatz b. d. Korr.: 1. Herr Prof. ROSENFELD weist mich auf die folgende Arbeit hin, in der ebenfalls das Problem der Vertauschungsrelationen zwischen verschiedenen Feldern (vgl. Fußn. 3) behandelt wird: H. UMEZAWA, J. PODOLANSKI u. S. ONEDA, Proc. Phys. Soc., Lond. **A 68**, 503 [1955]. — 2. Die Rolle des Zusammenhangs zwischen Spin und Statistik im weiteren Sinn beim Beweis des TCP-Theorems wird auch untersucht in einer demnächst erscheinenden Arbeit von KINOSHITA.

[16] Es wäre jedoch ganz verkehrt, hieraus zu folgern, daß $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})$ zusammen den ganzen Raum aufspannen. Bei geradzahligem n gibt es sogar den Fall, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{R})=\mathfrak{R}$ (und natürlich $\operatorname{Dim}\mathfrak{R}=n/2$) ist.

Plasma-Konfigurationen mit Oberflächenströmen, die von einem Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten werden

Von R. KIPPENHAHN

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **13 a**, 260—267 [1958]; eingegangen am 5. Februar 1958)

Configurations of a plasma with constant pressure and with surface-currents are examined which are in equilibrium with a exterior magnetic potential-field. With the aid of an existence-theorem from the theory of partial differential equations the question of the existence of such configurations is reduced to differential-geometrical properties of the surface of the plasma. These properties are then investigated for the torus of circular cross-section with an interior azimutal magnetic field and for a surface of axial symmetry with variable diameter. Finally a torus of variable cross-section is treated approximately.

Ein Plasma von unendlicher Leitfähigkeit erfülle ein Gebiet $\mathfrak{G}$ des Raumes. In $\mathfrak{G}$ sei ein magnetisches Potentialfeld $\mathfrak{B}_{\mathrm{i}}$, wobei der Fall $\mathfrak{B}_{\mathrm{i}}\equiv 0$ nicht ausgeschlossen sein möge, während außerhalb von $\mathfrak{G}$ ein von Null verschiedenes Feld $\mathfrak{B}_{\mathrm{a}}$ vorhanden sei. Im Innern von $\mathfrak{G}$ soll also kein elektrischer Strom fließen. Wir setzen voraus, daß die Grenzfläche (Oberfläche) $\mathfrak{F}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ nicht von Feldlinien durchsetzt werde, daß also die Fläche $\mathfrak{F}$ durch Feldlinien erzeugt werde. Wir bezeichnen Funktionswerte auf $\mathfrak{F}$ mit einem Stern und definieren

$$\mathfrak{B}_i^* = \lim_{P\to\mathfrak{F}} \mathfrak{B}_i\,, \quad \mathfrak{B}_a^* = \lim_{Q\to\mathfrak{F}} \mathfrak{B}_a\,,$$

wobei die Grenzübergänge so zu verstehen sind, daß der Punkt P (bzw. der Punkt Q) sich von innen (bzw. von außen) her der Fläche $\mathfrak{F}$ nähert. Es sei $\mathfrak{n}$ die nach außen weisende Flächennormale von $\mathfrak{F}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$(\mathfrak{B}_i^*\,\mathfrak{n}) = 0\,, \quad (\mathfrak{B}_a^*\,\mathfrak{n}) = 0\,, \tag{1}$$

womit an der Fläche $\mathfrak{F}$ auch die Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes gesichert ist, d. h. daß damit auch $\mathfrak{n}(\mathfrak{B}_a^* - \mathfrak{B}_i^*) = 0$ gilt. In der Fläche $\mathfrak{F}$ möge ein Flächenstrom $\mathfrak{j}^*$ fließen. Dann folgt aus den MAXWELLschen Gleichungen

$$\mathfrak{j}^* = \frac{c}{4\pi}\,[\mathfrak{n}\times(\mathfrak{B}_a^* - \mathfrak{B}_i^*)]\,. \tag{2}$$

Der Druck im Innern des Plasmas sei konstant. Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen das Plasma, das vermöge seines Innendruckes sich auszudehnen bestrebt ist, von dem Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten werden kann. Wir haben daher an der Grenzfläche neben (1) noch die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{1}{2\,c}\,[\mathfrak{j}^*\times(\mathfrak{B}_i^* + \mathfrak{B}_a^*)] + \mathfrak{n}\,p = 0$$

zu erfüllen. Hieraus folgt, daß die Voraussetzung (1) notwendig ist, denn wäre $(\mathfrak{B}_i^*\,\mathfrak{n}) \neq 0$, dann wäre wegen $\mathfrak{n}(\mathfrak{B}_a^* - \mathfrak{B}_i^*) = 0$ auch $\mathfrak{n}(\mathfrak{B}_i^* + \mathfrak{B}_a^*) = 2(\mathfrak{B}_i^*\,\mathfrak{n}) \neq 0$, also wäre $[\mathfrak{j}^*\times(\mathfrak{B}_i^* + \mathfrak{B}_a^*)]$ nicht genau parallel zu $-\mathfrak{n}$ und das wäre im Widerspruch mit der Gleichgewichtsbedingung.

Wegen (2) geht die Gleichgewichtsbedingung über in

$$\frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{B}_i^{*2} + p = \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{B}_a^{*2} \tag{3}$$

(vgl. auch BIERMANN, HAIN, JÖRGENS, LÜST[1]).

Damit ist also die folgende potentialtheoretische Aufgabe zu lösen: Vorgegeben sei eine Fläche $\mathfrak{F}$, die ein zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}$ umschließen möge. In $\mathfrak{G}$ sei ein Potentialfeld

$$\mathfrak{B}_i = -\operatorname{grad}\Phi_i$$

so definiert, daß $(\mathfrak{B}_i^*\,\mathfrak{n}) = 0$ ist. Gesucht wird eine Potentialfunktion Φ_a für einen Teil des Außenraumes in der Nachbarschaft von $\mathfrak{F}$, welche auf $\mathfrak{F}$ die Randbedingungen

$$(\mathfrak{n}\operatorname{grad}\Phi_a) = 0\,, \tag{4}$$

$$\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}^2\Phi_a = \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{B}_i^{*2} + p \tag{5}$$

erfüllt. Dabei wird nicht gefordert, daß Φ_a im ganzen Außenraum definiert und singularitätenfrei ist. Es soll aber einen Teilbereich des Außenraumes geben, dessen Grenzfläche die Fläche $\mathfrak{F}$ enthält und in dem Φ_a regulär ist.

Die Verhältnisse liegen hier anders als bei den üblichen Aufgaben der Potentialtheorie. Wenn $\mathfrak{F}$ einfach zusammenhängend ist und von Φ_a Regularität im Außenraum verlangt wird, so wird bereits durch die Vorgabe von $(\mathfrak{n}\operatorname{grad}\Phi_a)$ auf der Fläche die Lösung Φ_a eindeutig bestimmt und die Bedingung (5) läßt sich im allgemeinen nicht mehr erfüllen. Zum Unterschied davon hat man hier einerseits wesentlich schwächere Regularitätsbedingungen, da man nur fordert, daß das Feld $\mathfrak{B}_a$ nur in einer gewissen Nachbarschaft von $\mathfrak{F}$ regulär zu sein braucht. Zum anderen läßt man für $\mathfrak{F}$ auch mehrfach zusammenhängende Flächen zu. Es wird sich weiter unten zeigen, daß die gestellte Randwertaufgabe der Potentialtheorie bei einer ganz im Endlichen liegenden Fläche $\mathfrak{F}$ nur dann lösbar ist, wenn $\mathfrak{F}$ mehrfach zusammenhängend ist. Φ_a wird dann eine mehrdeutige Funktion, die jedoch eindeutige Ableitungen besitzt und damit auf eindeutige Feldkomponenten führt.

Für den Fall, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ ein Torus von kreisförmigem Querschnitt ist, in dessen Innern $\mathfrak{B}_i$ identisch verschwindet, haben BIERMANN, HAIN, JÖRGENS, LÜST[1] eine Lösung des Problems angegeben. Wir werden später in Abschnitt 5 sehen, daß diese Lösung den Spezialfall einer einparametrigen Schar von axialsymmetrischen Lösungen darstellt. Die in der zitierten Arbeit angegebene Näherungsmethode (S. 828) legt bereits den Gedanken nahe, daß es eine solche Schar geben muß. Die im folgenden entwickelte Methode gestattet, die Verteilung des Oberflächenstromes für alle diese Fälle anzugeben. Sie läßt sich außerdem noch auf den Fall $\mathfrak{B}_i \not\equiv 0$ erweitern.

1. Linien vorgegebenen Abstandsgesetzes auf einer Fläche

Bevor die oben definierte potentialtheoretische Aufgabe behandelt wird, sollen hier einige differentialgeometrische Hilfsbetrachtungen erledigt werden.

[1] L. BIERMANN, K. HAIN, K. JÖRGENS u. R. LÜST, Z. Naturforschg. **12a**, 826 [1957].

Der Grund dazu ist, daß die Schnittlinien der Flächen $\Phi_a = \text{const}$ mit der Fläche $\mathfrak{F}$ gewisse einfache differentialgeometrische Eigenschaften haben. Im Falle verschwindenden Innenfeldes $\mathfrak{B}_i$ fallen sie mit den Stromlinien zusammen und sind äquidistant, im allgemeinen Fall erfüllen sie ein gewisses – später näher zu bestimmendes – Abstandsgesetz.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine Fläche, deren Punkte $P(x, y, z)$ in der Parameterdarstellung

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

(x, y, z analytische Funktionen von u, v) gegeben seien. Wir nehmen an, daß die Linien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ orthogonal sind, daß also die metrische Fundamentalform durch

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

mit

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

gegeben ist. Es soll nun auf $\mathfrak{F}$ ein neues orthogonales System $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ liegen, so daß

$$ds^2 = e\,d\lambda^2 + g\,d\mu^2,$$

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2, \quad g = \left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \mu}\right)^2$$

wird. Die Funktion $\sqrt{e}\,d\lambda$ stellt dann den Abstand zweier benachbarter Linien $\lambda = \text{const}$ dar. Wir wollen in diesem Fall sagen, *die Linien $\lambda = const$ erfüllen das Abstandsgesetz $\sqrt{e}$*.

Es sei nun das Abstandsgesetz $\sqrt{e} = f(u, v)$ vorgegeben und es soll eine Funktion $\lambda(u, v)$ gesucht werden, so, daß die Linien $\lambda = \text{const}$ das Abstandsgesetz $\sqrt{e} = f$ erfüllen. Das führt auf eine Differentialgleichung für die Funktion $\lambda(u, v)$. Es muß $\lambda(u, v)$ so bestimmt werden, daß in der metrischen Fundamentalform der λ-Linien und der dazu orthogonalen μ-Linien (deren Abstandsgesetz hier nicht interessieren soll) der Koeffizient von $d\lambda^2$ gerade $e = f^2(u, v)$ ist.

Der Gradient einer auf $\mathfrak{F}$ definierten Funktion Φ^* hat im u-v-System die Komponenten

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial v}$$

im λ-μ-System die Komponenten

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda}, \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu}.$$

Da der absolute Betrag des Gradienten eine Invariante ist, hat man

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{e}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \Phi^*}{\partial \mu}\right)^2. \tag{6}$$

Setzt man jetzt $\Phi^* = \lambda$, so folgt

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{e}. \tag{7}$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung für die Funktion λ, deren Linien $\lambda = \text{const}$ das Abstandsgesetz $\sqrt{e} = f(u, v)$ erfüllen. Ist $\sqrt{e} = 1$, so erhält man speziell die Diffgl. für äquidistante Linien

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)^2 = 1. \tag{8}$$

2. Der Existenzsatz

Zu dem in der Einleitung gestellten Problem lassen sich sofort notwendige Bedingungen an die Oberfläche $\mathfrak{F}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ angeben. Es sei

$$\mathfrak{B}_i = -\operatorname{grad} \Phi_i$$

die Lösung der Potentialgleichung in $\mathfrak{G}$ und es sei

$$(\mathfrak{B}_i^*\,\mathfrak{n}) = 0.$$

Dann hat die gesuchte Lösung

$$\mathfrak{B}_a = -\operatorname{grad} \Phi_a$$

für den Außenraum an der Fläche $\mathfrak{F}$ die Randbedingungen

$$(\mathfrak{n} \operatorname{grad} \Phi_a) = 0, \quad \operatorname{grad}^2 \Phi_a = p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^{*2} \tag{9}$$

zu erfüllen. Die erste Bedingung besagt, daß an jedem Punkt der Fläche $\mathfrak{F}$ der Vektor $\operatorname{grad} \Phi_a$ in der Fläche $\mathfrak{F}$ liegt. Die anschauliche Bedeutung der zweiten Bedingung gewinnt man, wenn man Schnittlinien der Flächen $\Phi_a = \text{const}$ mit der Fläche $\mathfrak{F}$ betrachtet. Bestimmen wieder u, v ein orthogonales Koordinatensystem in der Fläche $\mathfrak{F}$ und setzt man

$$\lambda = \Phi_a^* = \lim_{Q \to \mathfrak{F}} \Phi_a, \quad p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^{*2} = e^{-1},$$

so geht die zweite Bedingung (9) über in die Gl. (7). Die Linien $\Phi_a^* = \text{const}$ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ sind also Linien, die ein durch p, $\mathfrak{B}_i^{*2}$ vorgegebenes Abstandsgesetz erfüllen. Ist speziell $\mathfrak{B}_i \equiv 0$, dann werden die Linien $\Phi_a^* = \text{const}$ äquidistante Linien; sie sind dann identisch mit den Stromlinien des Oberflächenstromes. Daraus ergibt sich sofort eine notwendige Bedingung für die Fläche $\mathfrak{F}$:

Sind die Fläche $\mathfrak{F}$, der Druck p und das Innenfeld $\mathfrak{B}_i$ vorgegeben, so ist für die Existenz einer die Bedingungen (9) erfüllenden Außenlösung Φ_a notwendig, daß sich die Fläche $\mathfrak{F}$ mit einem singularitätenfreien System von Linien des Abstandsgesetzes $\left(p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^{*2}\right)^{-1/2}$ einfach überdecken läßt.

Dabei soll unter singularitätenfrei verstanden werden, daß Φ_a^* auf $\mathfrak{F}$ analytisch ist und kein Extremum besitzt, so daß grad Φ_a^* überall eine eindeutige Richtung definiert. Daraus folgt unmittelbar, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ nicht endlich und einfach zusammenhängend zugleich sein darf, da eine endliche Fläche von den Zusammenhangsverhältnissen einer Kugel von keinem singularitätenfreien Liniensystem einfach überdeckt werden kann. Die Fläche $\mathfrak{F}$ muß vielmehr mehrfach zusammenhängend sein und die Funktion Φ_a^* mehrdeutig.

Weiter unten wird gezeigt werden, daß diese Forderung auch hinreichend ist, so daß der folgende Existenzsatz gilt:

Es sei $\mathfrak{G}$ *ein zusammenhängendes Raumgebiet,* $\mathfrak{B}_i$ *ein Potentialfeld in* $\mathfrak{G}$, *dessen Feldlinien ganz in* $\mathfrak{G}$ *liegen, so daß die Oberfläche* $\mathfrak{F}$ *von Feldlinien des Feldes* $\mathfrak{B}_i$ *gebildet wird. Ferner sei p eine beliebige positive Zahl. Dann ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer bis zu einem gewissen endlichen Abstand von* $\mathfrak{F}$ *regulären Lösung* Φ_a *der Potentialgleichung im Außenraum, welche die Randbedingungen*

$$(\mathfrak{n} \operatorname{grad} \Phi_a) = 0\,, \quad \operatorname{grad}^2 \Phi_a = p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^{*2}$$

erfüllt, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ *mit einem überall singularitätenfreien System von Kurven des Abstandsgesetzes* $(p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_i^{*2})^{-1/2}$ *einfach überdeckt werden kann. Zu jeder solchen Überdeckung der Fläche durch ein Liniensystem der geforderten Art gibt es genau eine bis auf eine additive Konstante bestimmte Lösung* Φ_a, *die selbst mehrdeutig ist, jedoch eindeutige Ableitungen besitzt.*

Bevor dieser Satz im nächsten Abschnitt bewiesen werden soll, sei hier eine Folgerung vorausgeschickt. Wenn die Fläche $\mathfrak{F}$ ein Kreistorus ist und wenn das Innenfeld $\mathfrak{B}_i$ verschwindet, dann können die Stromlinien des Oberflächenstromes nicht rein meridional verlaufen, denn da wegen (2) die Stromlinien mit den Linien $\Phi_a^* =$ const zusammenfallen, so müssen sie äquidistant sein. Die Meridiankreise eines Torus sind aber nicht äquidistant, also muß $\mathfrak{j}^*$ eine azimutale Komponente haben. Das haben bereits BIERMANN, HAIN, LÜST und JÖRGENS[1] sowie BIERMANN und SCHLÜTER[2] auf andere Weise bewiesen. Hier folgt dieses Ergebnis direkt geometrisch. Daß der Strom eine Azimutalkomponente haben muß, folgt jetzt aber auch für allgemeinere Flächen. Man betrachte die Fläche, die entsteht, wenn ein in einer Ebene $\varphi =$ const eines Systems von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) liegender, die z-Achse nicht schneidender Kreis in φ-Richtung um die z-Achse bewegt wird, wobei sich ein Radius ϱ mit φ ändern möge, jedoch so, daß $\varrho(\varphi)$ die Periode 2π hat und wobei ϱ immer so klein bleiben möge, daß die entstehende Fläche die z-Achse weder schneidet noch berührt. Die Fläche $\mathfrak{F}$ ist also eine torusartige Figur mit kreisförmigen Querschnitten, deren Durchmesser mit φ variiert. Auch in diesem Fall gibt es keine Gleichgewichtslösung mit verschwindender φ-Komponente des Stromes, da auch bei dieser Fläche die Meridianlinien nicht äquidistant sind.

Es sei nun $\mathfrak{F}$ eine allgemeine zweifach zusammenhängende Fläche. Dann gibt es auf $\mathfrak{F}$ zwei Arten von geschlossenen (sich selbst nicht schneidenden) Linien, die sich nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Die einen entsprechen den Parallelkreisen des Torus, die anderen den Meridionalkreisen. Diese den Meridiankreisen entsprechenden Kurven von $\mathfrak{F}$ sollen jetzt *meridianartige* Kurven heißen. Dann legen die Ergebnisse beim Torus und bei der oben beschriebenen Verallgemeinerung die folgende Vermutung nahe: Ist $\mathfrak{F}$ eine zweifach zusammenhängende Fläche, so ist die Gleichgewichtsaufgabe mit Oberflächenströmen und verschwindendem Innenfeld nicht lösbar, wenn längs einer beliebigen meridianartigen Kurve L

$$\oint_L |[\mathfrak{j}^* \times d\mathfrak{l}]| = 0$$

gilt. Dabei soll $d\mathfrak{l}$ jeweils die Richtung der Tangente von L haben. Diese Vermutung wurde zuerst von BIERMANN[3] im Zusammenhang mit Überlegungen am Kreistorus formuliert. Unsere obige Verallgemeinerung bestätigt die Vermutung bereits für eine weitere Klasse von Flächen. Wenn das oben angegebene Linienintegral für eine einzige meridianartige Kurve L verschwindet, so verschwindet es auch für alle meridianartige Kurven der Fläche, da sonst das Vektorfeld $\mathfrak{j}^*$ auf $\mathfrak{F}$ nicht singularitätenfrei wäre. Im besonderen sind dann die Stromlinien selbst meridianartige Kurven und die Vermutung

[2] L. BIERMANN u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a,** 805 [1957].

[3] Mündliche Mitteilung.

kann in der Form ausgesprochen werden: Die Gleichgewichtsaufgabe ist nur dann lösbar, wenn der Oberflächenstrom nicht ausschließlich längs meridianartigen Kurven fließt. Die Vermutung ist gleichwertig mit der Behauptung, daß man eine zweifach zusammenhängende Fläche nicht mit meridianartigen Kurven einfach überdecken kann, wenn die Kurven gleichzeitig äquidistant sein sollen. Obwohl diese Behauptung anschaulich einleuchtet, scheint sie nicht elementar beweisbar zu sein.

Da wir später zeigen werden, daß beim Kreistorus auch bei nichtverschwindendem Potential-Innenfeld keine Lösung mit rein meridionalem Oberflächenstrom möglich ist, liegt der Gedanke nahe, daß auch bei $\mathfrak{B}_\mathrm{i} \not\equiv 0$

$$\oint_L |[\mathfrak{j}^* \times d\mathfrak{l}]|$$

nicht verschwinden darf, wenn das Gleichgewichtsproblem lösbar sein soll*.

3. Beweis des Existenzsatzes

Daß die Forderung notwendig ist, wurde bereits gezeigt. Zum Beweis der Umkehrung denke man sich ein System von Linien $\lambda(u,v) = \text{const}$ des Abstandsgesetzes $(p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_\mathrm{i}^{*2})^{-1/2}$ gegeben. Die dazu orthogonale Linienschar sei $\mu(u,v) = \text{const}$. Die metrische Fundamentalform im λ-μ-System wird dann

$$ds^2 = e\, d\lambda^2 + g\, d\mu^2 \quad \text{mit} \quad e = \left(p + \frac{1}{8\pi} \mathfrak{B}_\mathrm{i}^{*2}\right)^{-1}.$$

Wir setzen jetzt $\quad \Phi_\mathrm{a}^* = \lambda + \alpha, \quad (\alpha = \text{const})$.

Dann ist Φ_a^* auf der ganzen Fläche festgelegt, und wir fordern jetzt an Stelle von (9) für Φ_a an der Fläche $\mathfrak{F}$ die Randbedingungen

$$\Phi_\mathrm{a} = \Phi_\mathrm{a}^* = \lambda + \alpha, \quad (\mathfrak{n} \operatorname{grad} \Phi_\mathrm{a}) = 0. \qquad (10)$$

Um zu erkennen, daß durch (9) die Lösung des Außenraumes eindeutig bestimmt ist, ergänzen wir das System der u-v-Linien zu einem räumlichen (krummlinigen) orthogonalen Koordinatensystem, das im Raum durch die Flächen $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$ festgelegt werde. Die Erweiterung auf den Raum ist auf beliebig viele Arten möglich, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

In dem krummlinigen, orthogonalen Koordinatensystem laute die metrische Fundamentalform

$$ds^2 = g_{11}\, du^2 + g_{22}\, dv^2 + g_{33}\, dw^2.$$

Die LAPLACEsche Gleichung hat dann die Form

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(a \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(b \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(c \frac{\partial \Phi}{\partial w}\right) = 0 \qquad (11)$$

mit $\quad a = \sqrt{\frac{g_{22}\, g_{33}}{g_{11}}}, \quad b = \sqrt{\frac{g_{11}\, g_{33}}{g_{22}}}, \quad c = \sqrt{\frac{g_{11}\, g_{22}}{g_{33}}}$.

Wir nehmen an, daß die Fläche $\mathfrak{F}$ durch $w = 0$ gegeben sei. Die Potentialgleichung (11) läßt sich in der Form

$$\Phi_{ww} = -\frac{1}{c}\,[a_u\, \Phi_u + b_v\, \Phi_v + c_w\, \Phi_w + a\, \Phi_{uu} + b\, \Phi_{vv}] \qquad (12)$$

schreiben und die Anfangsbedingungen (10) an der Fläche sind

$$(\Phi)_{w=0} = \lambda(u,v) + \alpha, \quad (\Phi_w)_{w=0} = 0. \qquad (13)$$

Es ist nun nötig zu zeigen, daß in einer Umgebung der Fläche $\mathfrak{F}$, also bei $w = 0$, eine analytische Lösung existiert. Die Anfangswertaufgabe (12), (13) wird als Spezialfall von einem allgemeineren Existenz- und Konvergenzsatz von v. KOWALEWSKY[4] erfaßt. Dieser allgemeine Satz bezieht sich auf das System der n Gleichungen

$$\frac{\partial^{r_i} z_i}{\partial x_1^{r_i}} = U_i(x_1, \ldots, x_m;\ z_1, \ldots, z_m;\ \ldots, z_{k/\beta_1 \ldots \beta_m}, \ldots) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Dabei ist $\quad z_{k/\beta_1 \ldots \beta_m} = \dfrac{\partial^{(\beta_1 + \ldots + \beta_m)}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_m^{\beta_m}} z_k$.

Die U_i sind analytische Funktionen. Als Anfangsbedingung sind die Funktionen

$$(z_i)_{x_1=0}, \quad \left(\frac{\partial z_i}{\partial x_1}\right)_{x_1=0}, \ldots, \quad \left(\frac{\partial^{r_i-1} z_i}{\partial x_1^{r_i-1}}\right)_{x_1=0} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

als analytische Funktionen von $x_2, \ldots, x_m$ vorgegeben. Der Existenzsatz, der in der Literatur oft auch als *Satz* von CAUCHY-KOWALEWSKY bezeichnet wird, besagt dann, daß die Lösung dieser Anfangswertaufgabe in der Umgebung jedes Punktes der Fläche $x_1 = 0$ eindeutig bestimmt ist und ihre Potenzreihen-

* Anm. b. d. Korr.: Inzwischen gelang es F. MEYER und H. U. SCHMIDT in einer noch nicht veröffentlichten Untersuchung Flächen von torusartigen Zusammenhangsverhältnissen zu konstruieren, welche eine Lösung des Gleichgewichtsproblems mit rein meridianartigen Oberflächenströmen gestatten. Die Meridianschnitte dieser (nicht-axialsymmetrischen) Flächen sind nicht mehr kreisförmig.

[4] S. v. KOWALEWSKY, J. Math. **80**, 1 [1875].
Ein Spezialfall des Satzes von CAUCHY-KOWALEWSKY, der ausreicht für alle axialsymmetrischen Fälle unseres in Abschnitt 1 formulierten Problems ist bewiesen in COURANT-HILBERT, Methoden d. Mathem. Physik II, Berlin 1937, S. 39.

entwicklung einen von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt.

Um (12), (13) in die Form der KOWALEWSKYschen Anfangswertaufgabe zu bringen, setzen wir

$$z_1 = \Phi\,,\ z_2 = \Phi_u\,,\ z_3 = \Phi_v\ ;\ x_1 = w\,,\ x_2 = u\,,\ x_3 = v$$

und erhalten aus (12)

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{c}\left[a_u z_2 + b_v z_3 + c_w \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + a \frac{\partial x_2}{\partial z_2} + b \frac{\partial z_3}{\partial x_3}\right] \quad (14)$$

mit $$a_u = \frac{\partial a}{\partial x_2}, \quad b_v = \frac{\partial b}{\partial x_3}, \quad c_w = \frac{\partial c}{\partial x_1}$$

und aus (13) $$(z_1)_{x_1=0} = \lambda + \alpha\,, \quad \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=0} = 0\,.$$

Die so erhaltene Anfangswertaufgabe ist genau der Spezialfall der KOWALEWSKYschen Anfangswertaufgabe, den man erhält, wenn man dort $n = 1$, $m = 3$, $r_1 = 2$ setzt. Deshalb konvergieren in der Umgebung jedes Punktes der Fläche $\mathfrak{F}$ die Potenzreihenentwicklungen der Lösung Φ.

Daß in den hier benötigten Fällen z_1 keine eindeutige Funktion ist, erschwert die Verhältnisse nicht, da in Gl. (14) z_1 selbst nicht vorkommt, sondern nur die (eindeutigen) Ableitungen von z_1. Daraus folgt, daß die Lösungsfunktion $z_1 = \Phi_{\mathrm{a}}$ im Außenraum zwar mehrdeutig ist, jedoch eindeutige Ableitungen besitzt.

4. Der Kreistorus

Die Fläche $\mathfrak{F}$ sei ein Torus von kreisförmigem Querschnitt, dessen Punkte $\mathrm{P}(x, y, z)$ durch

$$x = (a + \varrho \sin\tau) \cos\varphi, \quad y = (a + \varrho \sin\tau) \sin\varphi\,,$$
$$z = \varrho \cos\tau$$

gegeben seien. a ist der Radius der Torusseele, ϱ der Radius eines Meridionalschnittes. Auf $\mathfrak{F}$ ist ϱ konstant. Die nach außen weisende Flächennormalenrichtung $\mathfrak{n}$ bezeichnen wir als die ϱ-Richtung. Für das Innenfeld $\mathfrak{B}_{\mathrm{i}}$ hat man dann

$$B_{\mathrm{i}\varrho} = 0\,, \quad B_{\mathrm{i}\varphi} = \frac{b_{\mathrm{i}}}{a + \varrho \sin\tau}, \quad B_{\mathrm{i}\tau} = 0\,.$$

Der Innendruck sei $p > 0$. Die metrische Fundamentalform lautet

$$\mathrm{d}s^2 = \varrho^2\, \mathrm{d}\tau^2 + (a + \varrho \sin\tau)^2\, \mathrm{d}\varphi^2$$

und das gesuchte Liniensystem $\lambda = \mathrm{const}$ erhält man aus der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\tau}\right)^2 + \frac{1}{(a+\varrho\sin\tau)^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2 = p + \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{b_{\mathrm{i}}^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}\,.$$

Mit dem Ansatz

$$\lambda(\tau, \varphi) = C\,\varphi + f(\tau) \qquad (C = \mathrm{const})$$

folgt $$f = \varrho \int \sqrt{p + \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{b_{\mathrm{i}}^2 - 8\,\pi\, C^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

also $$\lambda = C\,\varphi + \varrho \int \sqrt{p + \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{b_{\mathrm{i}}^2 - 8\,\pi\, C^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Die Linien $\lambda = \mathrm{const}$ gehen schraubenartig um die Torusseele herum. Man erhält für das Magnetfeld

$$B^*_{\mathrm{a}\varrho} = 0\,, \quad B^*_{\mathrm{a}\varphi} = \frac{C}{a + \varrho\sin\tau}\,,$$

$$B^*_{\mathrm{a}\tau} = \sqrt{p + \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{b_{\mathrm{i}}^2 - 8\,\pi\, C^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}}\,.$$

($B^*_{\mathrm{a}\tau}$, $B^*_{\mathrm{a}\varphi}$ sind die meridionale und die seelenparallele Komponente von $\mathfrak{B}_{\mathrm{a}}{}^*$) und für den Strom

$$\frac{4\,\pi}{c}\, j_\varrho{}^* = 0\,, \quad \frac{4\,\pi}{c}\, j_\varphi{}^* = \sqrt{p + \frac{1}{8\,\pi}\,\frac{b_{\mathrm{i}}^2 - 8\,\pi\, C^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}}\,,$$

$$\frac{4\,\pi}{c}\, j_\tau{}^* = \frac{b_{\mathrm{i}} - C}{a + \varrho\sin\tau}\,.$$

Aus Realitätsgründen muß C den Ungleichungen

$$0 \leq C^2 \leq \frac{1}{8\,\pi} b_{\mathrm{i}}^2 + p\,(a + \varrho\sin\tau)^2 \leq \frac{1}{8\,\pi} b_{\mathrm{i}}^2 + p\,(a - \varrho)$$

genügen. Wir betrachten zuerst den Fall verschwindenden Innenfeldes, also $b_{\mathrm{i}} = 0$. Dann muß C^2 in dem Intervall

$$0 \leq C^2 \leq p\,(a - \varrho)^2$$

liegen. Ist $C = 0$, so ist das Feld rein meridional, während der Strom in äquidistanten Parallelkreisen azimutal fließt. Dies ist genau der Fall, für den BIERMANN, HAIN, JÖRGENS und LÜST[1] eine Lösung angegeben haben. Fordert man auch weiterhin $b_{\mathrm{i}} = 0$, jedoch $C^2 > 0$, so geht der Strom in spiralartiger Bewegung um den Torus herum. Die Stromlinien sind also äquidistante Linien auf dem Torus; die Flächendichte des Stromes ist konstant. Die Größe

$$\left|\frac{j_\varphi{}^*}{j_\tau{}^*}\right| = \sqrt{\left(p - \frac{C^2}{(a+\varrho\sin\tau)^2}\right)\frac{(a+\varrho\sin\tau)^2}{C^2}}$$
$$= \sqrt{p\,\frac{(a+\varrho\sin\tau)^2}{C^2} - 1}$$

läßt den Verlauf der Stromlinien anschaulich verstehen. An der Innenseite des Torus ($\sin\tau = -1$) ist $|j_\varphi{}^*/j_\tau{}^*|$ am kleinsten, außen ($\sin\tau = +1$) am größten. Das heißt: innen verläuft der Strom mehr meridional als außen. Im Grenzfall $C^2 = p\,(a - \varrho)^2$ verschwindet innen $j_\varphi{}^*$, der Strom schneidet den

Innenkreis des Torus ($\sin\tau = -1$) rein meridional, während außen ($\sin\tau = +1$)

$$\left|\frac{j_\varphi^*}{j_\tau^*}\right|_{\tau=\pi/2} = \frac{2}{1-\varrho/a}\sqrt{\frac{\varrho}{a}} \qquad (15)$$

gilt. BIERMANN, HAIN, JÖRGENS und LÜST [1] haben bereits gezeigt, daß es keine Lösung des Problems geben kann, bei dem der Strom rein meridional fließt. Aus unserem Existenzsatz folgt dasselbe Ergebnis, da auf dem Torus die meridionalen Linien nicht äquidistant sind. Der Grenzfall $C^2 = p(a-\varrho)^2$ ist der Fall mit dem geringsten Azimutalstrom. Bei ihm verschwindet die Azimutalkomponente an der Innenseite des Torus vollständig, sie hat aber außen noch den durch (15) gegebenen Wert. Für diesen Grenzfall geht für $\varrho/a \to 0$ $|j_\varphi^*/j_\tau^*|_{\tau=\pi/2}$ nach Null. Ist $\varrho/a = 0{,}1$, so wird $|j_\varphi^*/j_\tau^*|_{\tau=\pi/2} = 0{,}703$. Das heißt, daß beim Kreistorus $\varrho/a = 0{,}1$ mit verschwindendem Innenfeld ($b_\mathrm{i} = 0$) die Stromrichtung zur meridionalen Richtung an der Außenseite mindestens einen Winkel von 35° haben muß.

Wir betrachten nun den Fall $b_\mathrm{i} \neq 0$. Wenn $C^2 = 0$, so verschwindet $B^*_{\mathrm{a}\varphi}$, d. h. das Außenfeld ist rein meridional. Da aber für $b_\mathrm{i} \neq 0$ wegen (2) die Stromlinien nicht mehr senkrecht auf den Linien des Außenfeldes liegen, so fließt der zugehörige Flächenstrom nicht rein azimutal, sondern hat auch eine meridionale Komponente. Der andere Extremfall

$$C^2 = \frac{1}{8\pi} b_\mathrm{i}^2 + p(a-\varrho)^2$$

führt auf einen Strom, der an der Innenseite des Torus meridional verläuft, während das Feld $\mathfrak{B}_\mathrm{a}^*$ dort eine verschwindende meridionale Komponente besitzt. Wenn $b_\mathrm{i}^2 \leq \frac{8\pi}{8\pi-1}\, p(a-\varrho)^2$ gilt, so kann C in seinem erlaubten Bereich auch gleich b_i werden. In diesem Fall verschwindet j_τ^* identisch; der Strom fließt rein azimutal.

5. Flächen veränderlichen Durchmessers

Für das Folgende soll angenommen werden, daß das Innenfeld $\mathfrak{B}_\mathrm{i} \equiv 0$ ist. Für $\mathfrak{B}_\mathrm{i} \neq 0$ läßt sich die eben entwickelte Methode im Prinzip ebenso durchführen, sie führt jedoch auf kompliziertere Gleichungen. Wir betrachten jetzt die Fläche $\mathfrak{F}$, deren Punkte $\mathrm{P}(x,y,z)$ durch

$$x^2 + y^2 = \varrho^2(z)$$

bzw. durch

$$x = \varrho(z)\cos\varphi\,, \quad y = \varrho(z)\sin\varphi\,, \quad z = z$$

gegeben sind, wobei ϱ eine noch freie, analytische Funktion von z ist, die für alle reellen z größer als Null sein soll. Dann wird

$$\mathrm{d}s^2 = \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + (1+\varrho'^2)\,\mathrm{d}z^2 \qquad \left(\varrho' = \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}z}\right).$$

Als Innenraum bezeichnen wir alle Punkte $\mathrm{P}(x,y,z)$ mit

$$x^2 + y^2 - \varrho^2(z) < 0\,.$$

Da im Innenraum das Feld $\mathfrak{B}_\mathrm{i}$ verschwinden soll, geht Gl. (7) über in die Bedingungsgleichung für äquidistante Linien:

$$\frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{1+\varrho'^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = 1\,. \qquad (16)$$

Mit dem Ansatz

$$\lambda = C\varphi + g(z) \qquad (C = \mathrm{const})$$

erhält man $$g = \int\sqrt{\frac{(\varrho^2 - C^2)(1+\varrho'^2)}{\varrho^2}}\,\mathrm{d}z\,,$$

also $$\lambda = C\varphi + \int\sqrt{\frac{(\varrho^2 - C^2)(1+\varrho'^2)}{\varrho^2}}\,\mathrm{d}z\,. \qquad (17)$$

Wenn ϱ nicht von z abhängt, wird die Fläche $\mathfrak{F}$ ein Zylinder und die Linien $\lambda = \mathrm{const}$ gehen über in äquidistante Spiralen auf dem Zylinder.

Im allgemeinen Fall muß C^2 aus Realitätsgründen im Intervall

$$0 \leq C^2 \leq \varrho^2_{\min}$$

liegen, wobei $\varrho_{\min}$ die untere Grenze aller Werte ϱ auf der Fläche $\mathfrak{F}$ ist. Für das Außenfeld erhält man dann

$$B^*_{\mathrm{a}\varrho} = 0\,, \quad B^*_{\mathrm{a}\varphi} = -\frac{C}{\varrho}\,, \quad B^*_{\mathrm{a}z} = -\sqrt{1-\frac{C^2}{\varrho^2}}\,.$$

und für den Strom

$$\frac{4\pi}{c} j_\varrho^* = 0\,, \quad \frac{4\pi}{c} j_\varphi^* = \sqrt{1-\frac{C^2}{\varrho^2}}\,, \quad \frac{4\pi}{c} j_z^* = \frac{C}{\varrho}\,.$$

Man kann daraus erkennen, daß $|j_\varphi^*/j_z^*|$ an den Stellen der Fläche, an denen ϱ klein ist, auch klein ist. Im Grenzfall $C^2 = \varrho_{\min}$ verschwindet j_φ^* an der Stelle $z_{\min}$, an der ϱ seine untere Grenze annimmt. Der Strom fließt an dieser Stelle in z-Richtung, während das Feld dort nur eine φ-Komponente besitzt.

Es soll jetzt ein Kreistorus mit veränderlichem Radius mit einer Näherungstheorie behandelt werden. Es sei a der Radius der Torusseele. Die Längeneinheit sei für das Folgende so gewählt, daß $a = 1$ ist. Der in dieser Einheit gemessene Radius eines (kreisförmigen) Meridianschnittes sei σ. Die

Fläche $\mathfrak{F}$ sei gegeben durch

$$x = (1 + \sigma \sin \tau) \cos \varphi\,, \quad y = (1 + \sigma \sin \tau) \sin \varphi$$

$$z = \sigma \cos \tau\,.$$

Hierbei möge $\sigma = \sigma(\varphi)$ eine periodische Funktion von φ mit der Periode $2\pi/n$ sein. Dann wird

$$ds^2 = \sigma^2\, d\tau^2 + [(1 + \sigma \sin \tau)^2 + \sigma'^2]\, d\varphi^2\,, \quad \sigma' = \left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right).$$

Die Bedingungsgleichung für äquidistante Linien wird daher

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1}{(1+\sigma \sin \tau)^2 + \sigma'^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right) = 1\,. \tag{18}$$

Wir wollen jetzt eine Störungstheorie erster Ordnung durchführen, indem wir Größen, die in σ (nicht aber in σ') von höherer als erster Ordnung sind, gegenüber der 1 vernachlässigen. Man kann dann an Stelle von (18) schreiben

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1}{1+\sigma'^2}\left(1 - \frac{2\,\sigma \sin \tau}{1+\sigma'^2}\right)\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)^2 = 1\,. \tag{19}$$

Es sei nun $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$, worin λ_0 die bereits von (16), (17) her bekannte Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1}{1+\sigma'^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)^2 = 1 \quad \text{ist,}$$

also
$$\lambda_0 = C\,\tau + \int \sqrt{\frac{(\sigma^2 - C^2)\,(1+\sigma'^2)}{\sigma^2}}\, d\varphi\,. \tag{20}$$

Wenn man gegenüber der 1 Ausdrücke vernachlässigt, die in λ_1 und σ von höherer Ordnung sind, erhält man aus (19)

$$\frac{C}{\sigma^2}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \tau} + \sqrt{\frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma^2(1+\sigma'^2)}}\frac{\partial \lambda_1}{\partial \varphi} = \frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma(1+\sigma'^2)} \sin \tau\,. \tag{21}$$

Mit dem Ansatz

$$\lambda_1 = h(\varphi) \sin \tau + k(\varphi) \cos \tau$$

erhält man

$$\frac{C}{\sigma^2}(h \cos \tau - k \sin \tau) + \sqrt{\frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma^2(1+\sigma'^2)}} \cdot (h' \sin \tau + k' \cos \tau) = \frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma(1+\sigma'^2)} \sin \tau$$

bzw.
$$\frac{C}{\sigma^2} h + \sqrt{\frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma^2(1+\sigma'^2)}}\, k' = 0\,, \tag{22}$$

$$-\frac{C}{\sigma^2} k + \sqrt{\frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma^2(1+\sigma'^2)}}\, h' = \frac{\sigma^2 - C^2}{\sigma(1+\sigma'^2)}\,. \tag{23}$$

Eliminiert man h mit Hilfe von (22) aus (23), so erhält man

$$\frac{1}{C}\sqrt{\frac{(\sigma^2 - C^2)\,\sigma^2}{1+\sigma'^2}}\, k'' + \frac{1}{C}\left(\sqrt{\frac{(\sigma^2 - C^2)\,\sigma^2}{1+\sigma'^2}}\right)' \cdot k' + C\sqrt{\frac{1+\sigma'^2}{(\sigma^2 - C)\,\sigma^2}}\, k = -\sqrt{\frac{\sigma^2 - C^2}{1+\sigma'^2}}\,. \tag{24}$$

Die Lösung λ muß nun folgenden Nebenbedingungen genügen

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)_{\tau,\varphi} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)_{\tau+2\pi,\varphi}, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)_{\tau,\varphi} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)_{\tau+2\pi,\varphi}; \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)_{\tau,\varphi} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right)_{\tau,\varphi+2\pi/n}, \quad \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)_{\tau,\varphi} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi}\right)_{\tau,\varphi+2\pi/n}. \tag{26}$$

Die Bedingungen (25) sind durch unseren Ansatz automatisch erfüllt. Die Funktion λ_0 erfüllt auch die Bedingungen (26). Damit auch λ_1 die Bedingungen (26) erfüllt, fordern wir, daß die Lösung $k(\varphi)$ von (24) periodisch mit der Periode $2\pi/n$ ist. Dann hat auch h die Periode und $d\lambda_1/d\tau$, $d\lambda_1/d\varphi$ erfüllen die gewünschten Periodizitätsbedingungen (26).

Damit die Lösung k von (24) die Periode $2\pi/n$ hat, braucht man nur die Randbedingungen

$$k(0) = k\left(\frac{2\pi}{n}\right), \quad k'(0) = k'\left(\frac{2\pi}{n}\right) \tag{27}$$

zu fordern. Erfüllt k diese Randbedingungen, dann ist k wegen der Periodizität von σ auch selbst periodisch. Die Randbedingungen (27) lassen sich durch lineare Kombination zweier linear unabhängiger Lösungen der zu (24) gehörigen homogenen Gleichung mit einem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung (24) erfüllen. Damit folgt, daß zu beliebig vorgegebenem $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi + (2\pi/n))$ und zu jedem $C\,(0 \leq C^2 \leq \sigma^2_{\min})$ eine Lösung existiert, die man nach der angegebenen Methode berechnen kann.

Der Verfasser dankt den Herren K. Jörgens und R. Lüst für zahlreiche Diskussionen.